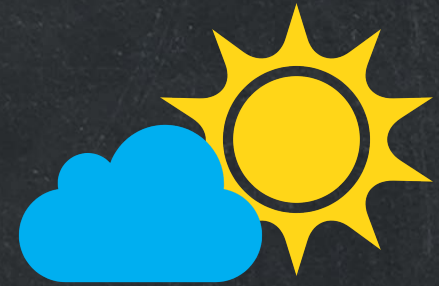


LIBRO MATEMATICA

VºD



INDICE:

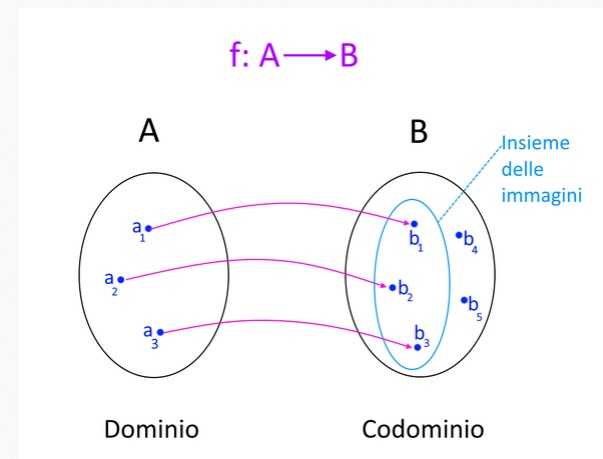
FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Definizione di funzione:

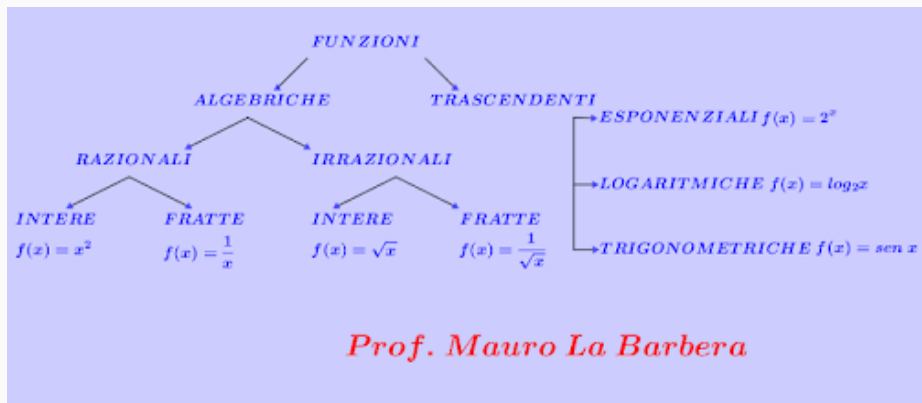
Una **funzione** f da A a B è una relazione che associa a *ogni* numero reale di A *uno e un solo* numero reale di B .

In una funzione $y=f(x)$, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta **variabile dipendente**.

Una funzione può essere in forma: **implicita** ad es. $3x+2y-6=0$ oppure **esplicita** ad es. $y=-3x+3$.

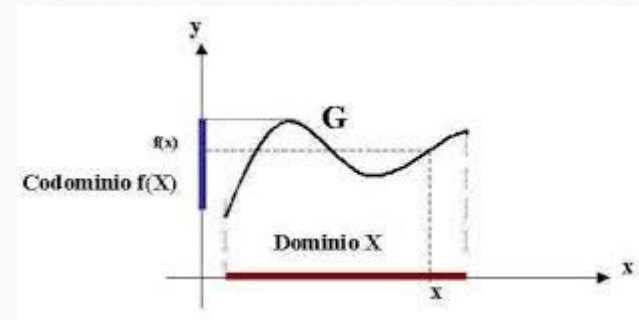


CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI



DOMINIO DI UNA FUNZIONE

Il **dominio (D)** di una funzione è l'insieme dei valori reali che si possono dare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y .



ZERI E SEGNO DI UNA FUNZIONE

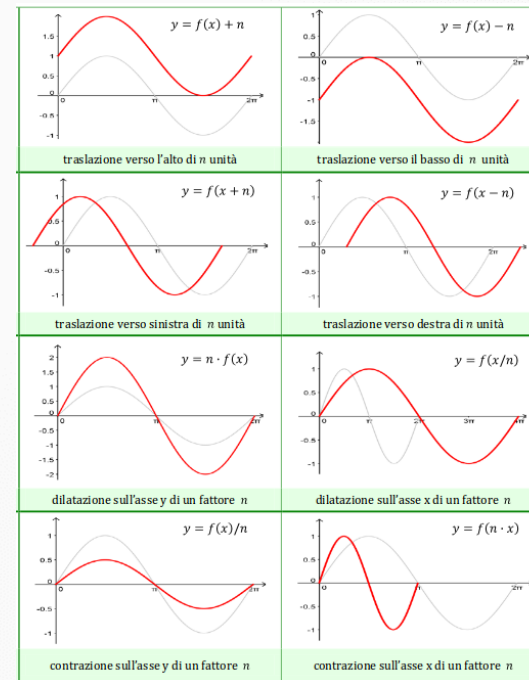
Un numero reale a è uno **zero della funzione** $y=f(x)$ se $f(a)=0$.

È possibile **studiare il segno** di una funzione, ovvero cercare per quali valori di x appartenenti al dominio il valore di y è positivo e per quali è negativo.

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIUNIVOCHES

Una funzione da A (dominio) a B (codominio) è:

- **iniettiva** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A ;
- **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A ;
- **biunivoca** (o biiettiva) se è sia iniettiva sia suriettiva.



FUNZIONE COMPOSTA

La composizione delle
funzioni non è commutativa:

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

ESEMPIO

Consideriamo le funzioni f e g ,

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1.$$

La funzione composta $g \circ f$ è:

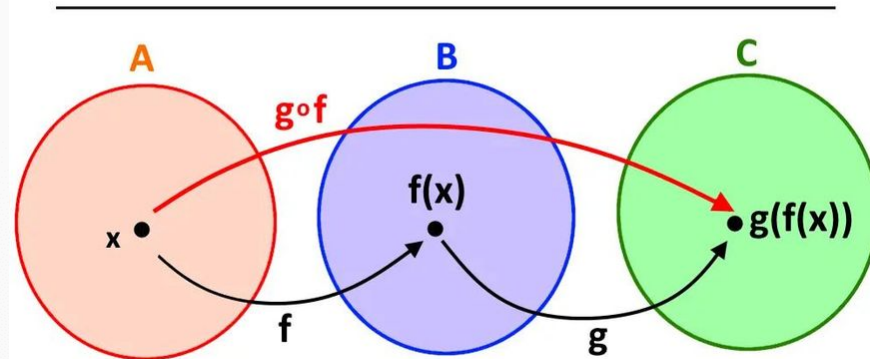
$$y = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Invece $f \circ g$ è:

$$y = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2.$$

Consideriamo le due funzioni $f: A \rightarrow B$ ed $g: B \rightarrow C$.

La funzione $g \circ f$ si dice **funzione composta**, ed è definita come:
 $g \circ f: A \rightarrow C$. Essa associa all'elemento x di A un elemento $f(x)$ di B ;
dopo di che associa a tale elemento $f(x)$ di B l'elemento $g(f(x))$
di C .



PROGRESSIONI ARITMETICHE

Una successione numerica è una **progressione aritmetica** quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante; questa differenza è la **ragione della progressione**.



- $a_n = a_{n-1} + d$

- Formula per calcolare il **termine n-esimo** di una progressione aritmetica conoscendo il **primo termine** e la **ragione** :

- $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Una progressione aritmetica di ragione d è:
crescente se $d > 0$, **decrescente** se $d < 0$, **costante** se $d = 0$

SOMMA DI DUE TERMINI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI:

Considerati k termini consecutivi di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

SOMMA DI TERMINI CONSECUTIVI DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA

4. LA SOMMA DI TERMINI CONSECUTIVI DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA

LE PROGRESSIONI 6 / 16

TEOREMA

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n .

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

DIMOSTRAZIONE

Scriviamo S_n per esteso:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

e in ordine inverso:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sommando termine a termine:

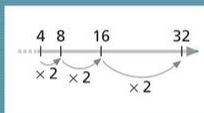
$$2 S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$\rightarrow 2 S_n = n (a_1 + a_n) \rightarrow S_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

5. LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

LE PROGRESSIONI 6 / 15



DEFINIZIONE

Una successione numerica si dice **progressione geometrica** quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante; tale rapporto si dice **ragione**.

Quindi, se a_n è il termine n -esimo di una progressione geometrica di ragione q :

$$a_n = q \cdot a_{n-1},$$

e anche:

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}.$$

Se $q > 0$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
se $q < 0$, i termini hanno **segno alternato**.

ESEMPIO

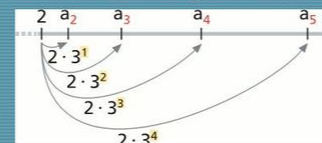
$a_1 = 6, q = 2$: 6, 12, 24, 48, ...
 $a_1 = -6, q = 2$: -6, -12, -24, -48, ...
 $a_1 = -6, q = -2$: -6, 12, -24, 48, ...

6. IL CALCOLO DEL TERMINE a_n DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA

LE PROGRESSIONI 7 / 15

ESEMPIO

La progressione geometrica di ragione 3 originata da $a_1 = 2$ è:



TEOREMA

In una progressione geometrica, il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione q con esponente $(n - 1)$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}, \text{ con } n > 0.$$

Principio di induzione matematica

Il *principio di induzione matematica* è una tecnica che viene utilizzata per dimostrare che una proposizione $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n

Per dimostrare $P(n)$ con il principio di induzione matematica, dobbiamo:

1. Controllare che $P(1)$ sia vera (primo passo dell'induzione)
2. Supporre che $P(n)$ sia vera (ipotesi di induzione) e verificare che è vera anche $P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$!

Esempio:

Vogliamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la proposizione $P(n)$

$$P(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

Non possiamo verificare se $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ sostituendo tutti i numeri naturali!

Funzioni

Clarissa Caputo e Maddalena Grosso VD

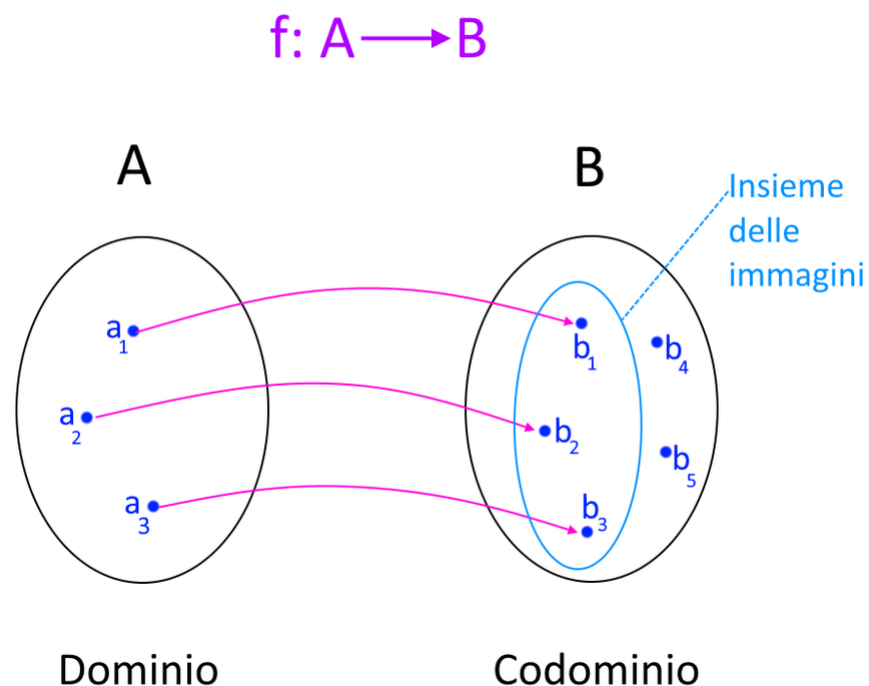
DEFINIZIONE DI UNA FUNZIONE:

Una **funzione** f da A a B è una relazione che associa a *ogni* numero reale di A *uno e un solo* numero reale di B .

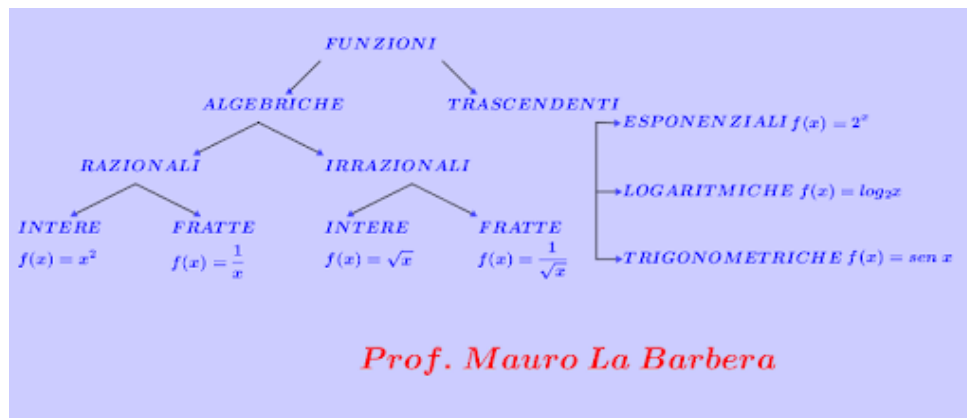
In una funzione $y=f(x)$, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta **variabile dipendente**.

Una funzione può essere in forma:

implicita (ad es. $3x+2y-6=0$) oppure **esplicita** (ad es. $y=-3x+3$).

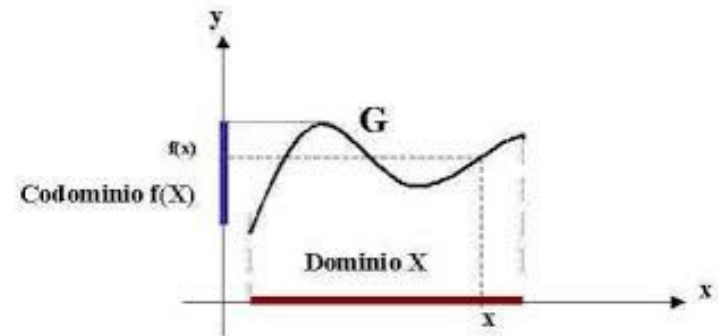


CLASSIFICAZIONE DELLE FUNZIONI:



DOMINIO DI UNA FUNZIONE:

Il **dominio (D)** di una funzione è l'insieme dei valori reali che si possono dare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y .



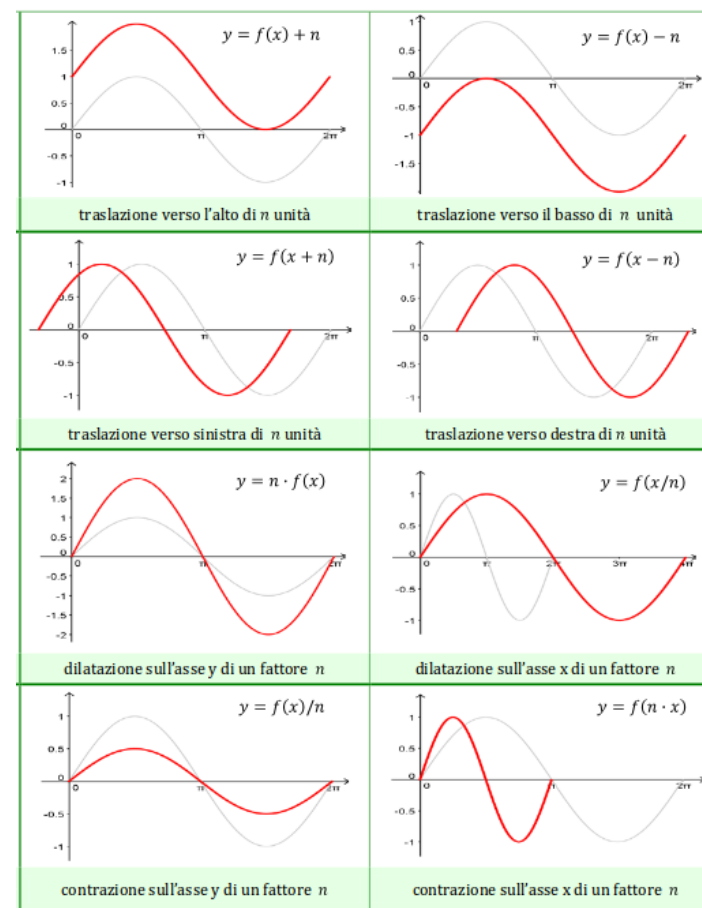
ZERI E SEGNO DI UNA FUNZIONE:

Un numero reale a è uno **zero della funzione** $y=f(x)$ se $f(a)=0$.
È possibile **studiare il segno** di una funzione, ovvero cercare per quali valori di x appartenenti al dominio il valore di y è positivo e per quali è negativo.

FUNZIONI INIETTIVE, SURIETTIVE E BIUNIVOQUE:

Una funzione da A (dominio) a B (codominio) è:

- **iniettiva** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A ;
- **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A ;
- **biunivoca** (o biiettiva) se è sia iniettiva sia suriettiva.



FUNZIONE COMPOSTA:

La composizione delle funzioni non è commutativa: $g \circ f \neq f \circ g$.

ESEMPIO

Consideriamo le funzioni f e g ,

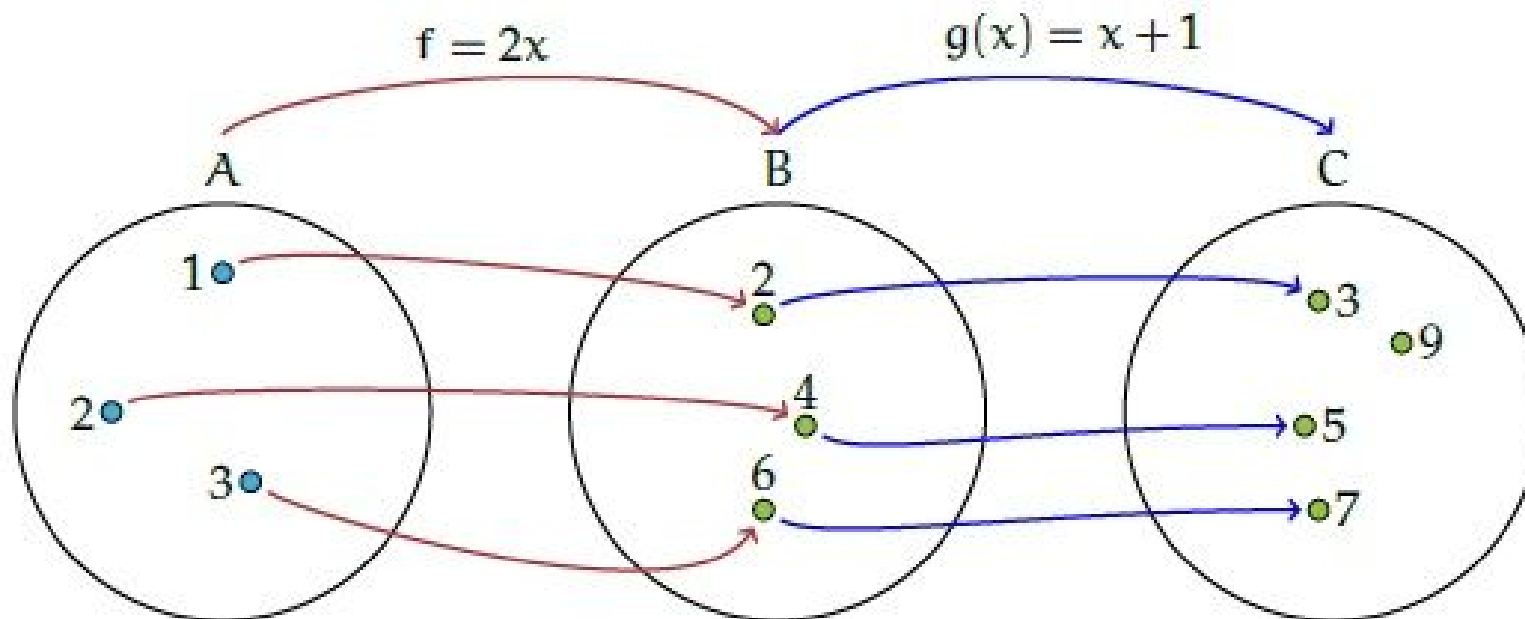
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1.$$

La funzione composta $g \circ f$ è:

$$y = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

Invece $f \circ g$ è:

$$y = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2.$$



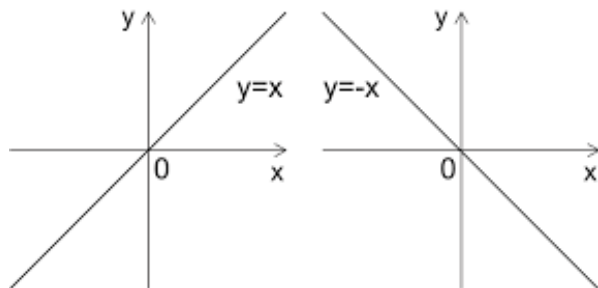
FUNZIONI CRESCENTI

$y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione crescente** in senso stretto in un intervallo I , sottoinsieme di D , se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I , con $x_1 < x_2$, risulta **$f(x_1) < f(x_2)$** .

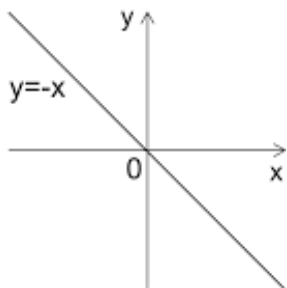
FUNZIONI DECRESCENTI

$Y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una **funzione decrescente** in senso stretto in un intervallo I , sottoinsieme di D , se, comunque scelti x_1 e x_2 appartenenti a I , CON **$x_1 < x_2$** risulta **$f(x_1) > f(x_2)$** .

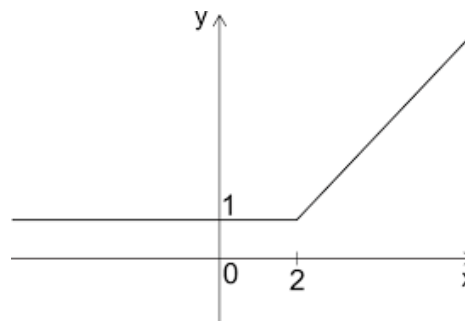
Funzione
strettamente
crescente



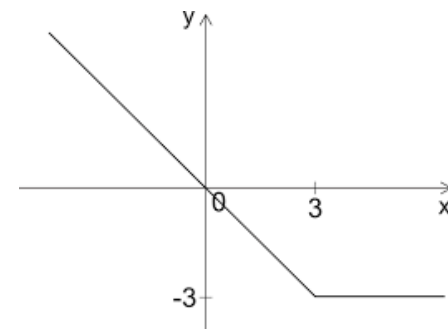
Funzione
strettamente
decrescente



Funzione crescente
in senso lato:



Funzione
decrescente in senso
lato:



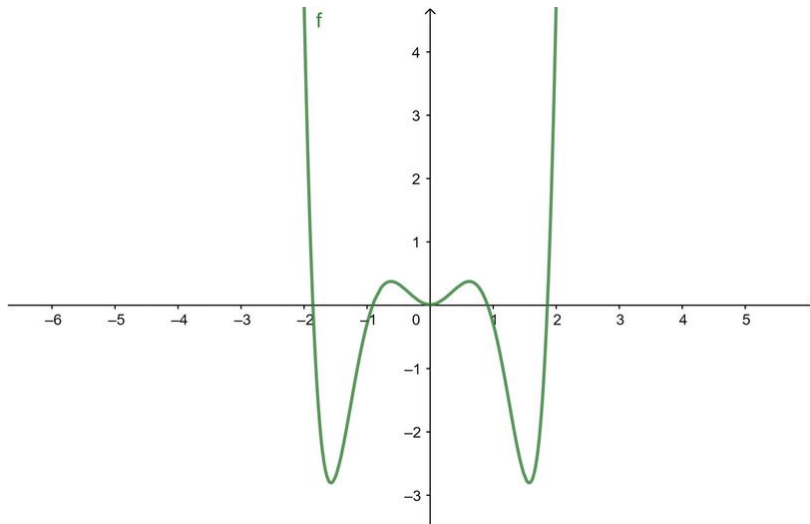
FUNZIONI PARI

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$.
 $y = f(x)$ è una **funzione pari** in D se $f(-x) = f(x)$ per qualunque x appartenente a D .

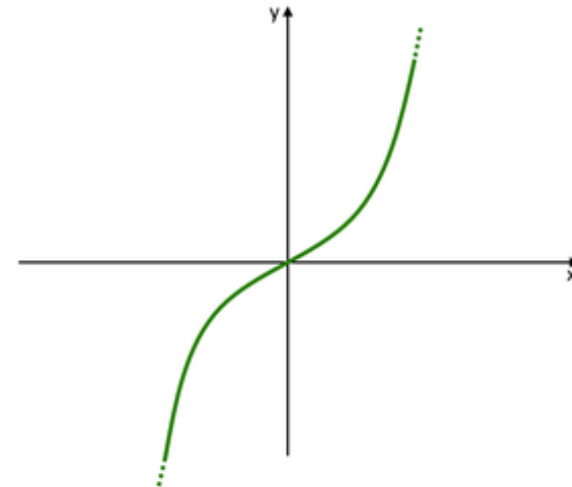
FUNZIONI DISPARI

Indichiamo con D un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che, se, $x \in D$, anche $-x \in D$.
 $y = f(x)$ è una **funzione dispari** in D se $f(-x) = -f(x)$ per qualunque x appartenente a D .

Funzione pari:



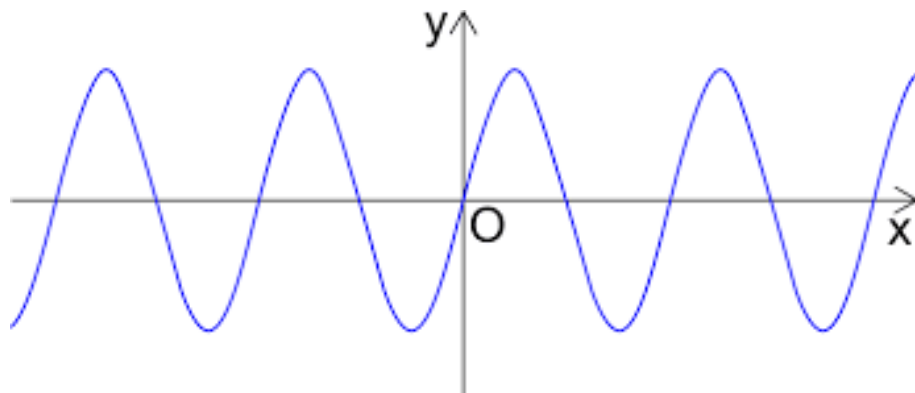
Funzione dispari:



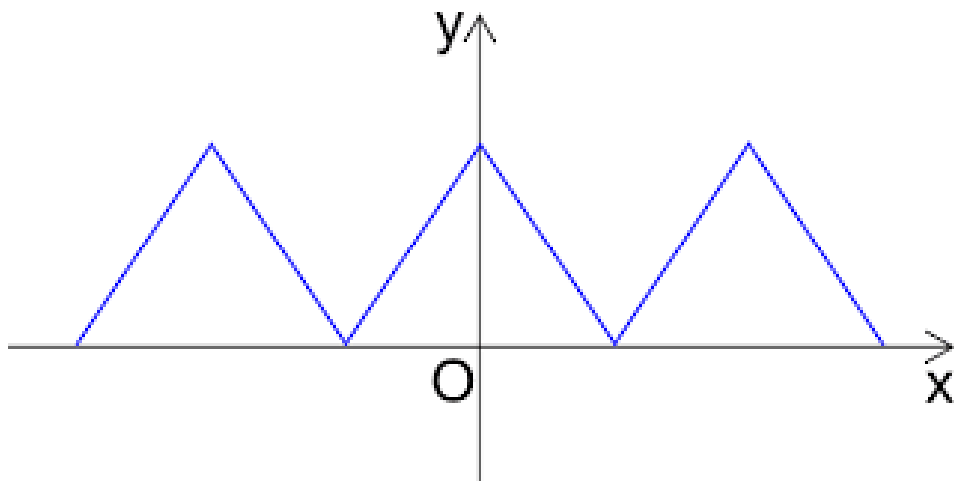
FUNZIONI PERIODICHE:

$y = f(x)$ è una **funzione periodica** di periodo T , con $T > 0$, se, per qualsiasi numero k intero, abbiamo $f(x) = f(x + kT)$.

ESEMPIO 1:

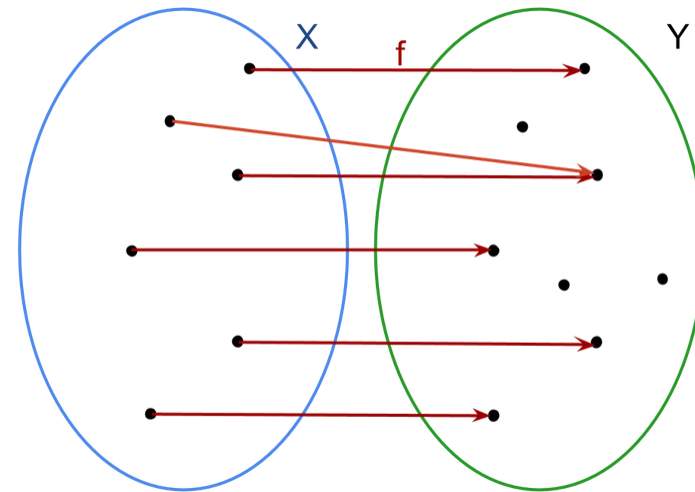
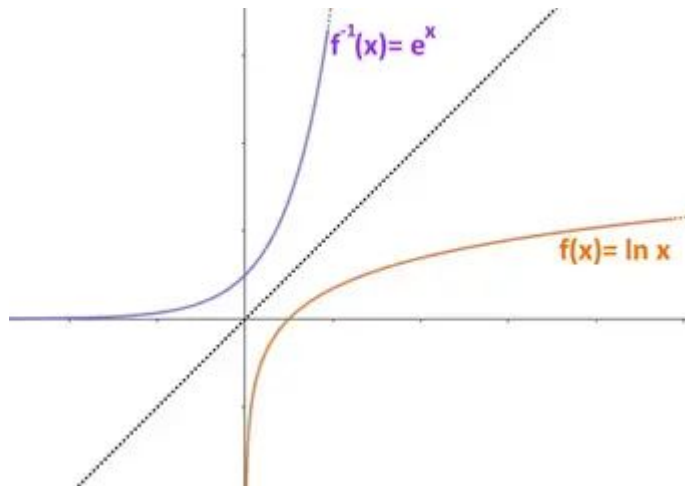


ESEMPIO 2:



FUNZIONE INVERSA

Data la funzione biunivoca
 $y = f(x)$ da A a B,
la **funzione inversa** di f è la funzione
biunivoca
 $x = f^{-1}(y)$ da B ad A
che associa a ogni y di B il valore x di A
tale che $y = f(x)$



Se una funzione ammette inversa,
si dice **invertibile**.

Il grafico di una funzione e quello
della sua inversa sono **simmetrici**
rispetto alla bisettrice del 1° e del 3°
quadrante.



Le successioni numeriche

;)

DEFINIZIONE :



insieme ordinato e infinito di numeri chiamati **termini**

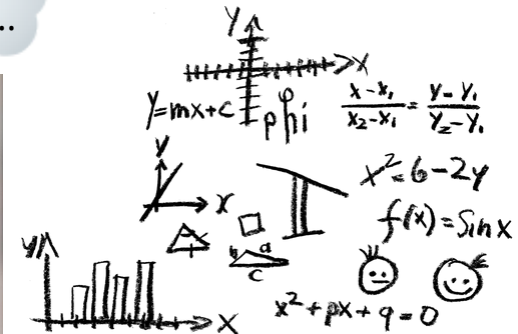
una **successione numerica** è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n

$$a_n = f(n)$$

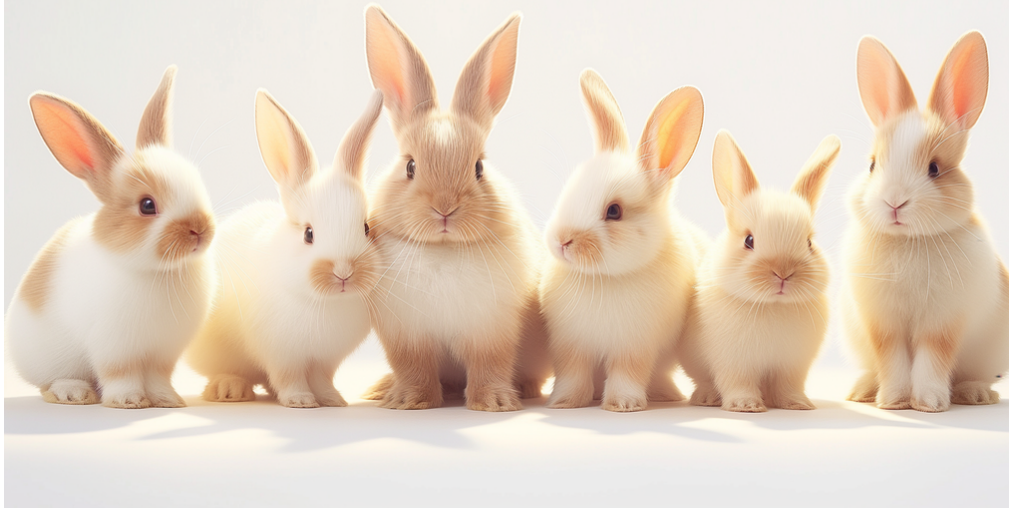
Pov: io che
cerco di
imparare



$a_1, a_2, a_3, \dots$
 $1, 2, 3, \dots$



I CONIGLI DI FIBONACCI



esempio:
Vi siete mai chiesti da dove parte il modo di dire figliare come un coniglio? beh, probabilmente non da qui, ma è un buon inizio: un giorno un tale, chiamato Fibonacci, decide di lasciare in una stanza chiusa una coppia di conigli per vedere in un anno quanti ne sarebbero nati. Ogni mese questa coppia generava una coppia, che dopo il secondo mese dalla nascita generava un'altra coppia.

Tempo in mesi

0

1

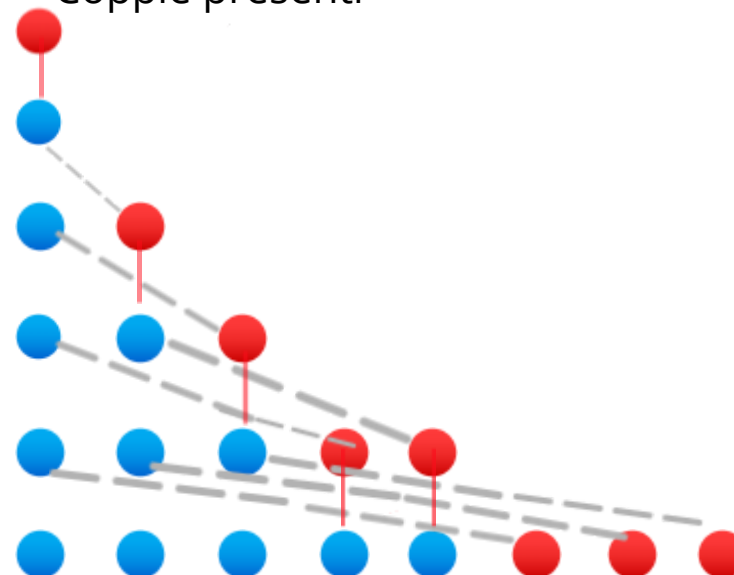
2

3

4

5

Coppie presenti



Numero di coppie

$a_0=1$

$a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=3$

$a_4=5$

$a_5=8$

UNA SUCCESSIONE È:

(successioni monotòne)

- crescente se ogni termine è maggiore del suo precedente
- decrescente se ogni termine è minore del suo precedente
- non decrescente (o crescente in senso lato)
- non crescente (o decrescente in senso lato)
- costante se ogni termine è uguale a suo precedente

es: 0,1,4,9,16,...

es: -1,-2,-3,-4,...

es: 0, 1/2, 1/2, 1, 3/2,...

es: -1,-1, -3/2, -2, -5/2,...

es: $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$,...

3, 7, 9, 21, 15, 35, ... ?

1, 4, 9, 16, 25, ... ?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ?

1, 3, 6, 10, 15, ... ?

5, 20, 8, 18, 11, 16, 14, ... ?

I LIMITI

● INTERVALLI

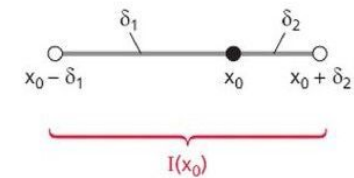
Un **intervallo** è un sottoinsieme di numeri reali, che corrisponde a una semiretta (intervallo **illimitato**), o a un segmento (intervallo **limitato**) della retta reale, e può aperto o chiuso.

● INTORNI DI UN PUNTO

Dato un numero reale x_0 , un intorno completo di x_0 è un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$, contenente x_0 :

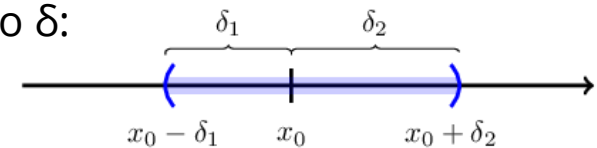
$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[,$$

con δ_1, δ_2 numeri reali positivi.



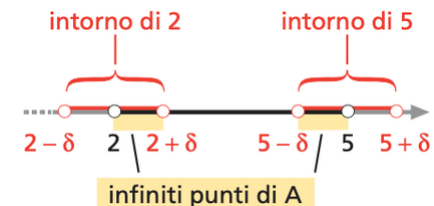
Dati un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ , un intorno circolare di x_0 , di raggio δ è l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ :

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[.$$



● PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A , sottoinsieme di $\mathbb{R}$, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A .



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$$

Limite finito per x che tende a x_0

La funzione (f), definita del dominio D , ha per limite il numero reale ℓ , per x che tende a x_0 punto di accumulazione di D , quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε , si può determinare un intorno completo di ℓ di x_0 , $I(x_0)$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon$$

per ogni x appartenente a $I \cap D$, diverso (al più) da x_0 . Si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell.$$

LIMITE PER ECCESSO E PER DIFETTO

Diciamo che $f(x)$ tende a ℓ per eccesso e scriviamo

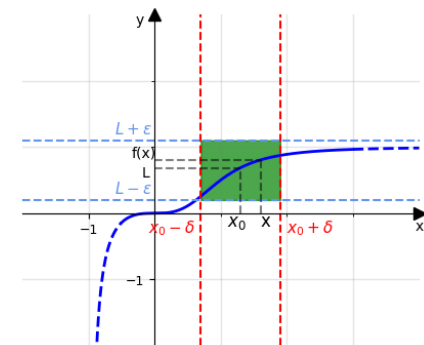
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^+$$

se $f(x)$ è una funzione con limite finito ℓ per x che tende a x_0 e assume sempre valori maggiori di ℓ in un intorno di x_0 con al più $x \neq x_0$.

Diciamo che $f(x)$ tende a ℓ per difetto e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell^-$$

se $f(x)$ è una funzione con limite finito ℓ per x che tende a x_0 e assume sempre valori minori di ℓ in un intorno di x_0 , con al più $x \neq x_0$.



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

Limite $+\infty$ per x che tende a x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a;b]$, escluso al più il punto x_0 interno ad $[a;b]$. $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che

$$f(x) > M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0 .

Si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

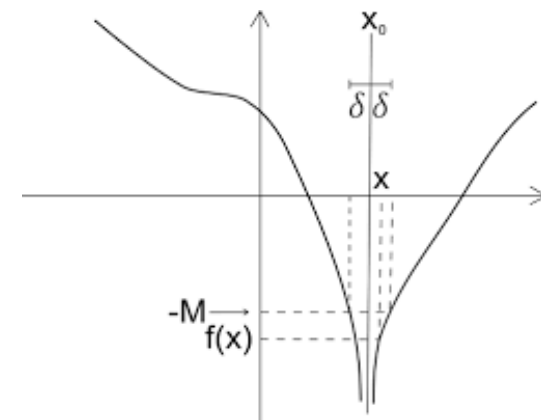
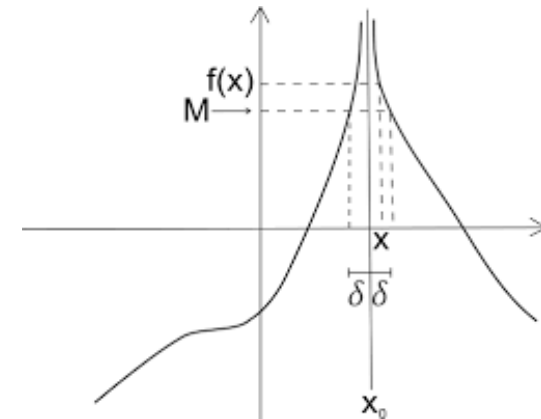
Limite $-\infty$ per x che tende a x_0

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a;b]$, escluso al più il punto x_0 interno ad $[a;b]$. $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che

$$f(x) < -M$$

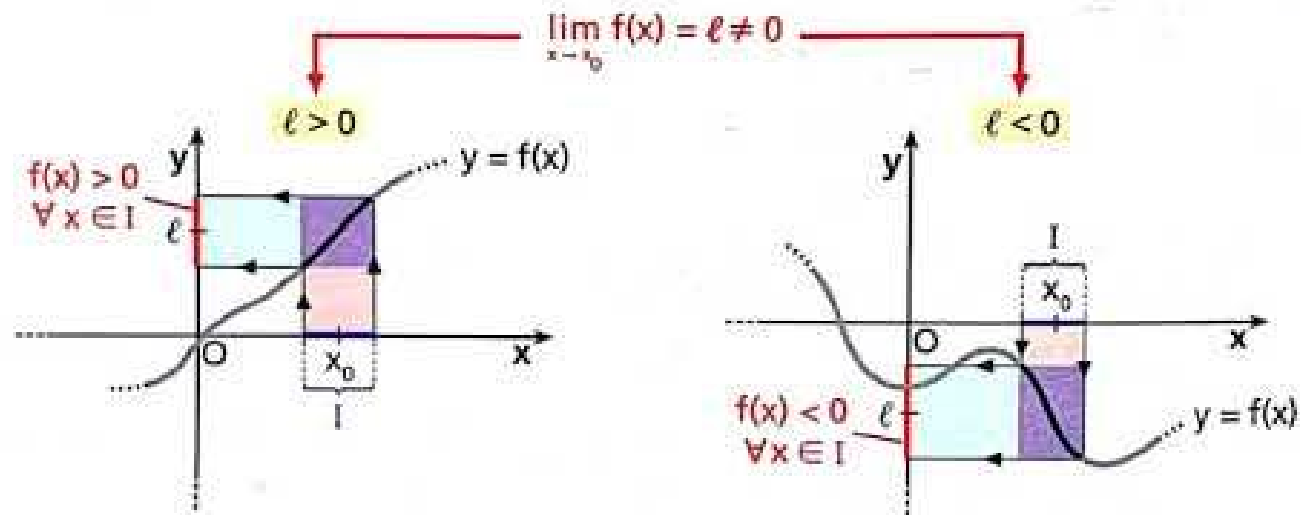
per ogni x di I e diverso da x_0 .

Si scrive: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

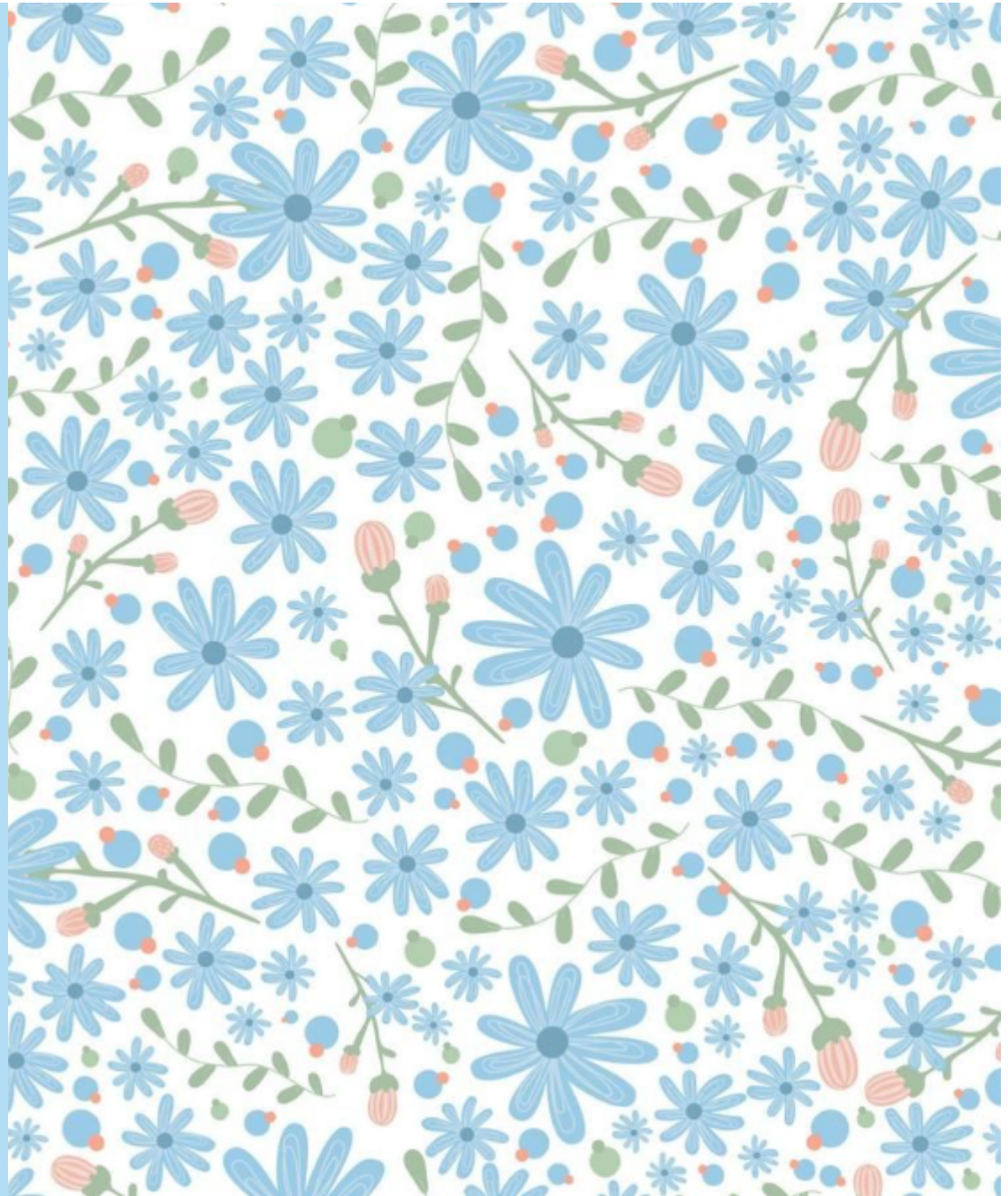


TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un numero ℓ diverso da 0, allora esiste un intorno I di x_0 in cui $f(x)$ e ℓ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi



OPERAZIONI SUI LIMITI



• LIMITI DI FUNZIONI ELEMENTARI

Il calcolo di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ è una funzione continua in x_0 poiché basta sostituire il valore di x_0 nell'espressione di $f(x)$.

• FUNZIONI POTENZA $y=x^n$

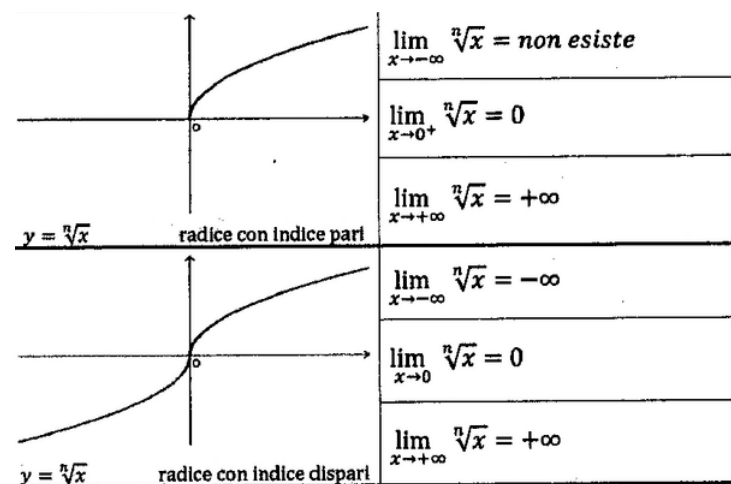
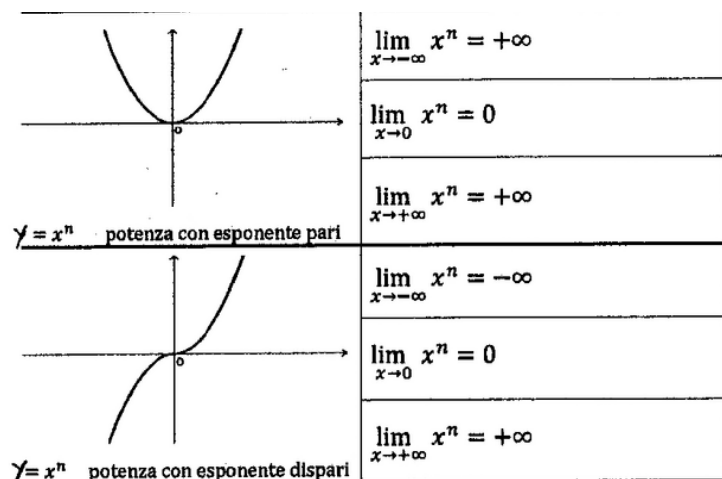
se n è pari: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$

se n è dispari: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

• FUNZIONI RADICE $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)

se n è pari: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

se n è dispari: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$



- Funzioni esponenziali $y=a^x$

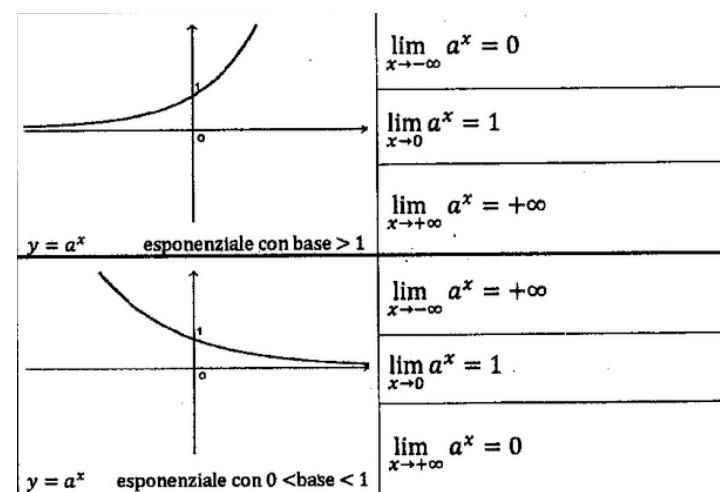
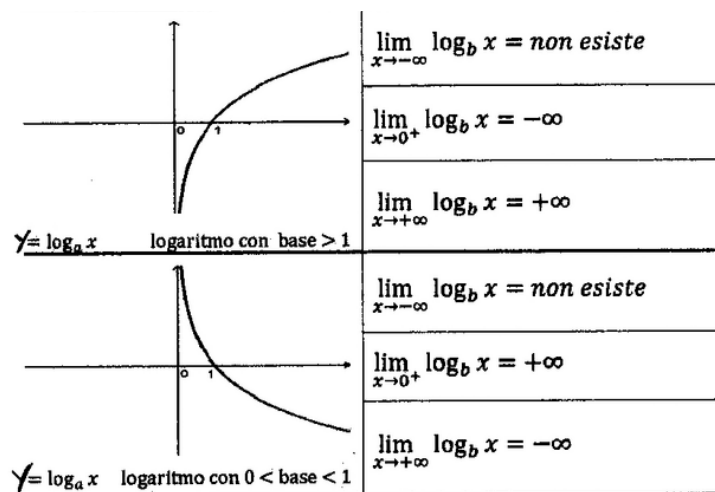
se $a>1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

se $0<a<1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

- Funzioni logaritmiche $y=\log_a x$

se $a>1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

se $0<a<1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$



- **LIMITE DELLA SOMMA**

Le funzioni hanno limite finito

In generale, è vero che il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei loro limiti, quando questi esistono e sono finiti.

- **TEOREMA**

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, dove $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m.$$

In particolare, questo teorema dice che, per ogni x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$.

Questo significa che **la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua**.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Cosa accade quando una delle due funzioni ha il limite infinito? Vediamo i vari casi possibili con questa tabella.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) + g(x)$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

LIMITE DEL PRODOTTO



Prodotto di una costante per una funzione con limite finito

Consideriamo le funzioni $f(x)=3x-1$ e $g(x)=4 \cdot f(x)=4 \cdot (3x-1)$.

Osserviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \{4 \cdot (3x-1)\} = 20 = 4 \cdot 5.$$

Abbiamo cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{4 \cdot f(x)\} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si può, infatti, dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Sia k un numero reale e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{k \cdot f(x)\} = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot l.$$

Le funzioni hanno limite finito

Consideriamo le funzioni $f(x)=3x, g(x)=x+1$ e

$$h(x)=f(x) \cdot g(x)=3x(x+1) \rightarrow h(x)=3x^2+3x.$$

Calcoliamo i limiti delle tre funzioni per x che tende a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2+3x) = 6 = 3 \cdot 2.$$

Notiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) \cdot g(x)\} = \{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\} \cdot \{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\}.$$

In generale, infatti, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \cdot m.$$

Dal teorema del limite del prodotto si ricava quello del limite della **potenza di una funzione**.

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = l^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}.$

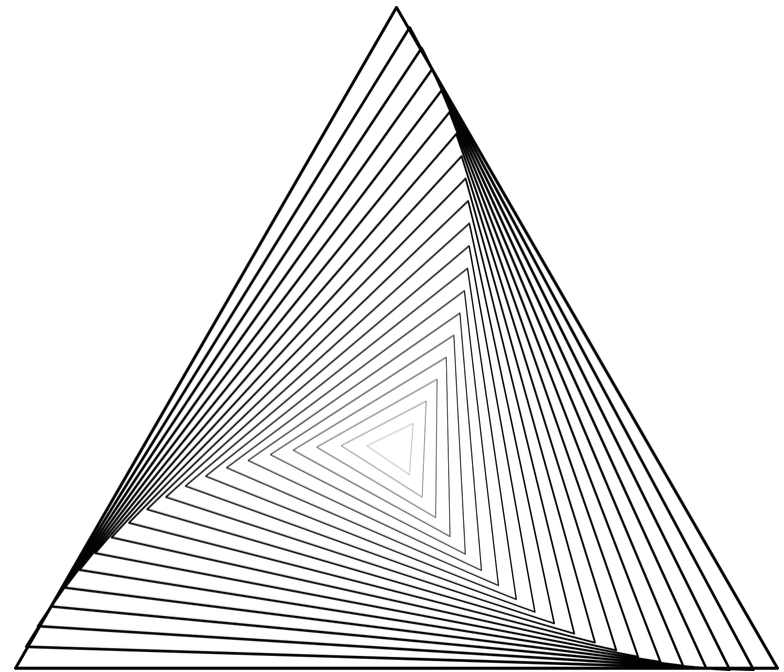
Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, per il limite del prodotto si possono presentare diversi casi che riassumiamo nella tabella, osservando che anche quando si usano i simboli $+\infty$ e $-\infty$ vale ancora la regola dei segni.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x) \cdot g(x)]$
$l > 0$	$\begin{matrix} < +\infty \\ < -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$
$l < 0$	$\begin{matrix} < +\infty \\ < -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$



LA
GEOMETRIA
ANALITICA
NELLO
SPAZIO

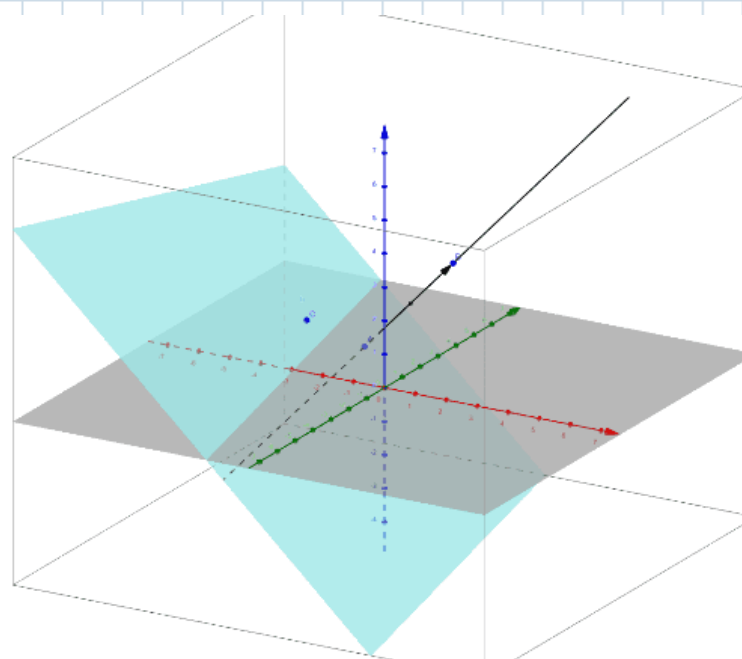


CHE COS'È LA GEOMETRIA ANALITICA?

La geometria analitica nello spazio si occupa di studiare figure geometriche utilizzando un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale.

In questo sistema, ogni punto è rappresentato da tre coordinate (x, y, z) rispetto a tre assi ortogonali:

- Asse x (ascisse)
- Asse y (ordinate)
- Asse z (quota)



DISTANZA TRA DUE PUNTI

La distanza tra due punti A (x_1, y_1, z_1) e B (x_2, y_2, z_2) è data dalla formula:

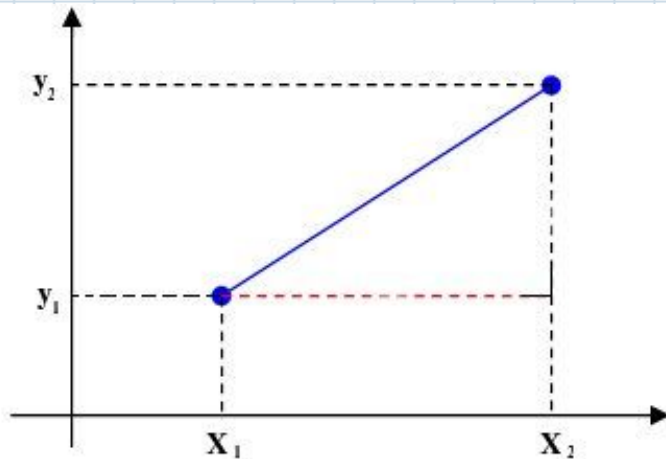
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EQUAZIONE DELLA RETTA NELLO SPAZIO

Una retta nello spazio può essere descritta con il parametro t attraverso il sistema:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

dove (x_0, y_0, z_0) è un punto noto della retta e (a, b, c) sono i coefficienti della direzione, ossia il vettore direzione della retta.



EQUAZIONE DEL PIANO

- L'equazione di un piano è nella forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

dove (A, B, C) è il vettore normale al piano, cioè un vettore perpendicolare al piano stesso.

- Per determinare il piano passante per tre punti $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, si trovano due vettori del piano e si calcola il loro prodotto vettoriale per ottenere il vettore normale.

POSIZIONE RECIPROCA TRA RETTE E PIANI

- Due rette possono essere parallele, incidenti o sghembe (quando non sono complanari e non si incontrano)
- Una retta può essere contenuta, parallela o incidente rispetto al piano
- due piani possono essere paralleli, coincidenti o incidenti (quando si intersecano lungo una retta)

DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA'

a cura di Maria Grazia Cianciulli

La **distribuzione di probabilità di X** è la funzione $f(x)$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = p(X=x)$

esempio:

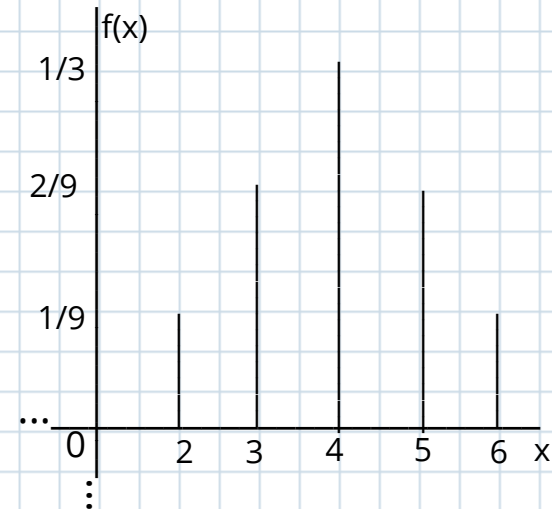
avendo un barattolo con tre palline numerate da 1 a 3. Estraiamo consecutivamente due palline, rimettendo ogni volta la pallina estratta nel barattolo. Costruiamo la distribuzione di probabilità della variabile casuale $X = \text{"somma dei due numeri estratti"}$. Le coppie di palline e le somme corrispondenti sono:

$(1,1) = 2$; $(1,2), (2,1) = 3$; $(1,3), (3,1), (2,2) = 4$; $(2,3), (3,2) = 5$; $(3,3) = 6$

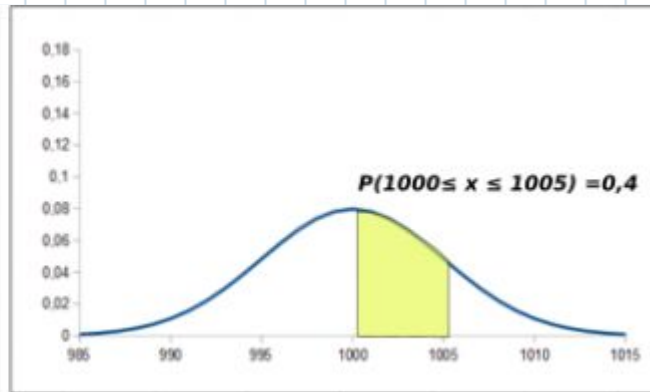
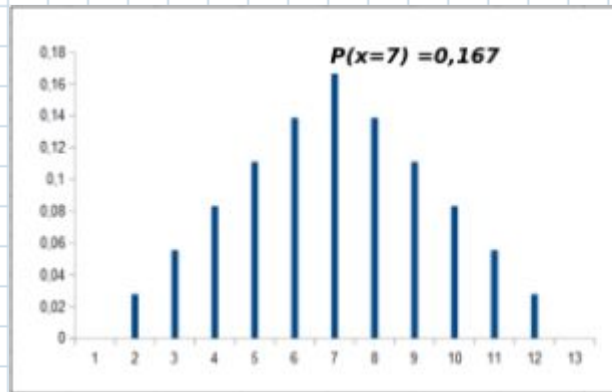
dove per ogni coppia la probabilità di estrazione è $1/9$

Quindi la variabile casuale X ha la seguente distribuzione di probabilità.

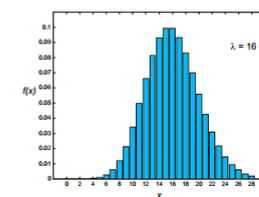
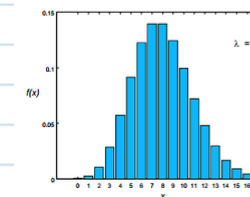
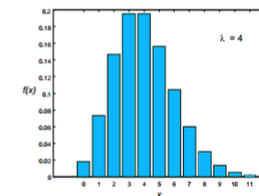
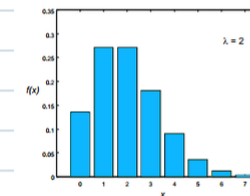
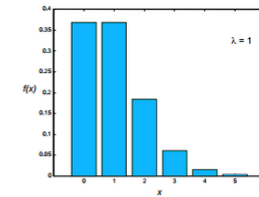
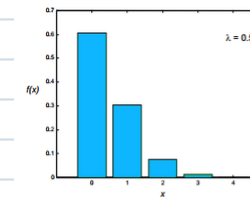
X	2	3	4	5	6
f	1/9	2/9	1/3	2/9	1/9



esempi di grafici:



In base alla scala di misura della variabile di interesse X , possiamo distinguere due tipi di distribuzioni di probabilità: 1. distribuzioni continue: la variabile viene espressa su un scala continua (es: il diametro del pistone) 2. distribuzioni discrete: la variabile viene misurata con valori numerici interi (es: numero di elementi non conformi o difettosi in un circuito stampato) Formalmente, le distribuzioni di probabilità vengono espresse da una legge matematica detta funzione di densità di probabilità (indicata con $f(x)$) o funzione di probabilità (indicata con $p(x)$) rispettivamente per le distruzioni continue o discrete.



DISTRIBUZIONI DI PROBABILITA' DI USO FREQUENTE

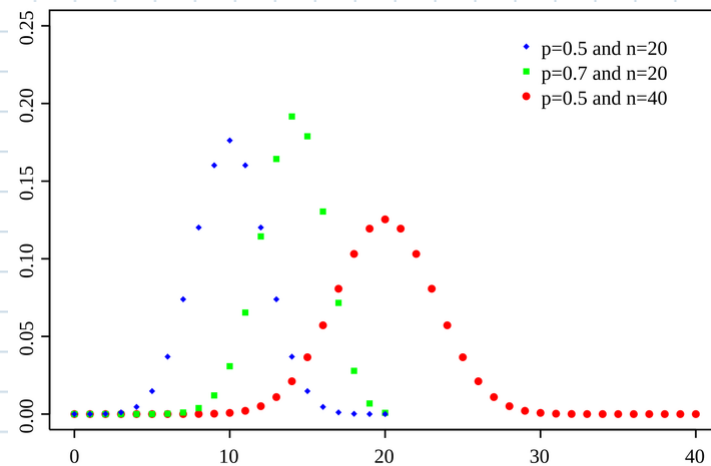
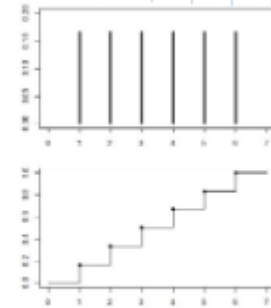
Distribuzione uniforme discreta

Una variabile casuale discreta X ha una distribuzione di probabilità uniforme se tutti i suoi valori hanno la stessa probabilità, cioè, se X assume i valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ e la p è data da:

$$p(X = x_i) = 1/n, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Il lancio di un dado regolare con $n = 6$ facce è un esempio di distribuzione uniforme discreta

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3,5$$
$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = 2,91667$$



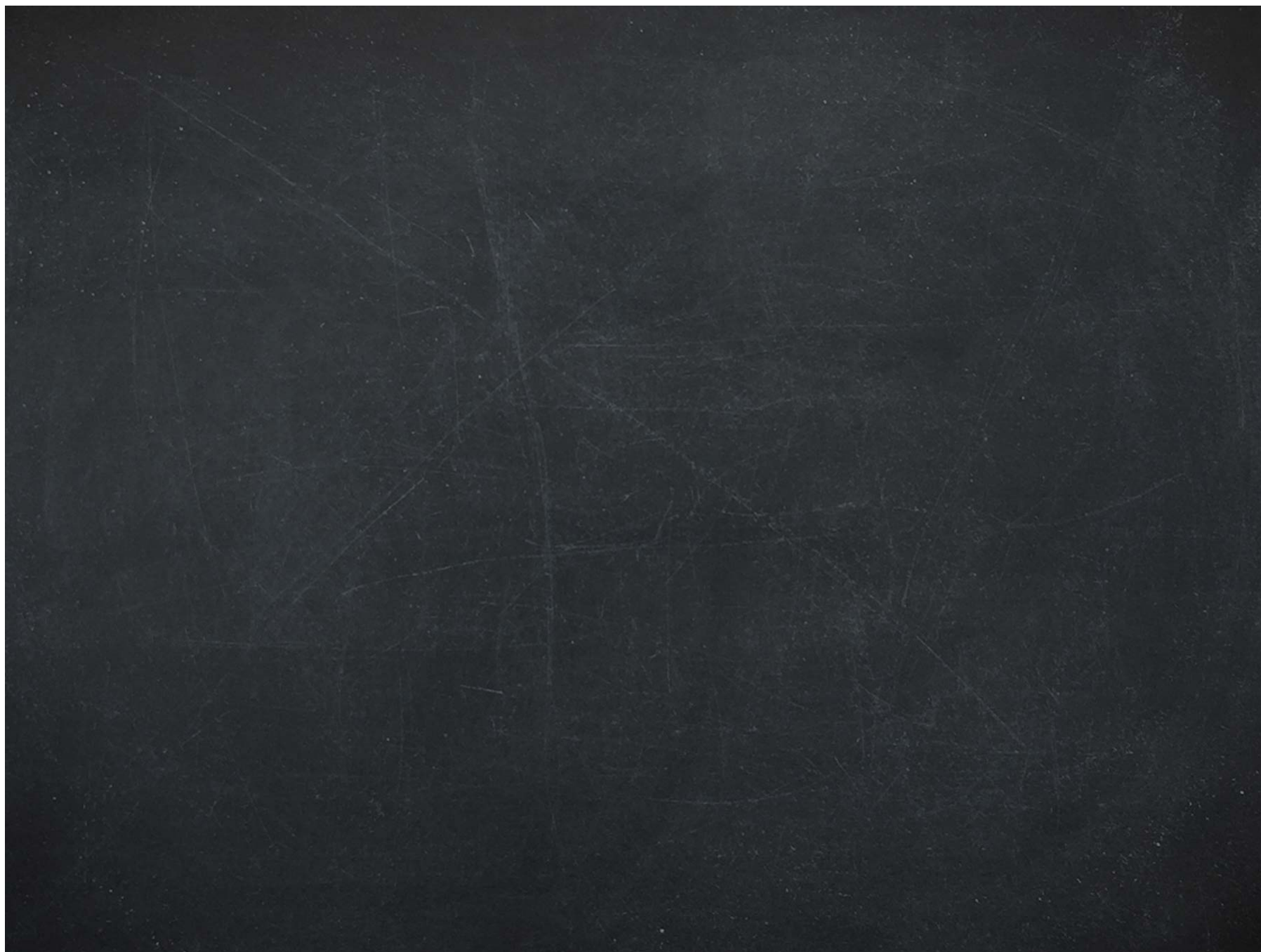
Distribuzione binomiale

Una variabile casuale discreta X , con valori $x = 0, 1, 2, \dots, n$, ha una distribuzione di probabilità binomiale di *parametri* n e p (con $0 < p < 1$) se:

$$p(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

AUTORI:

- Elisa Bocchino
- Clarissa Caputo
- Maria Grazia Cianiulli
- Liliana Drasleuca
- Perla Gambone
- Maddalena Grosso
- Alice Infante
- Giulia Pascale
- Ilaria Pizza
- Sara Rosania
- Natalia Soriano
- Gelsomina Villani



PROGRESSIONI ARITMETICHE:

Una successione numerica è una **progressione aritmetica** quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante; questa differenza è la **ragione della progressione**.

Una progressione aritmetica di ragione d è:
crescente se $d > 0$, **decrescente** se $d < 0$, **costante** se $d = 0$

SOMMA DI DUE TERMINI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI:

Considerati k termini consecutivi di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti degli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi

SOMMA DI DUE TERMINI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI:

Considerati k termini consecutivi di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

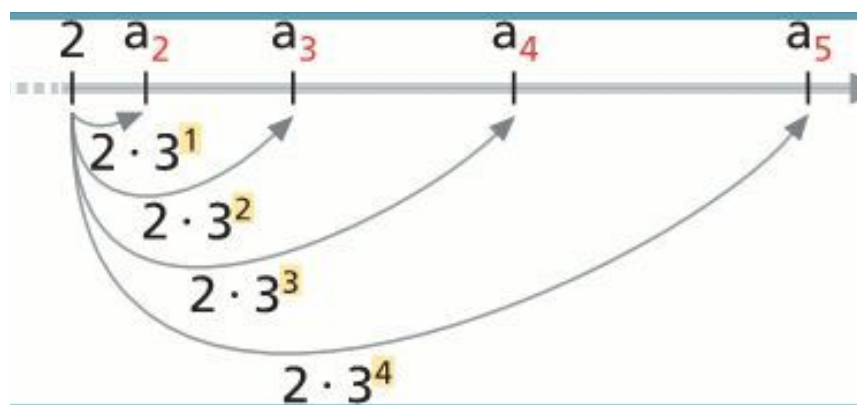
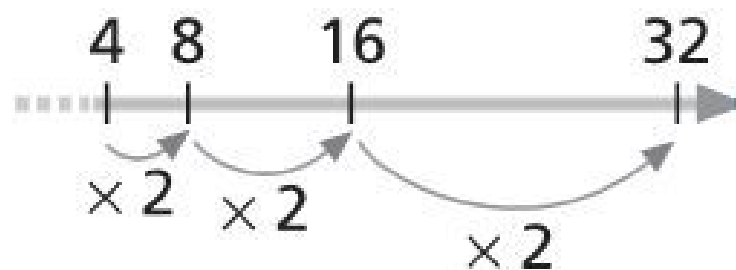
SOMMA DI TERMINI CONSECUTIVI DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA:

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica, la somma di due termini equidistanti agli estremi è costante e uguale alla somma dei termini estremi.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE:

Una successione è una progressione geometrica quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante; il rapporto è la ragione della progressione.



PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA:

Il *principio di induzione matematica* è una tecnica che viene utilizzata per dimostrare che una proposizione $P(n)$ è vera per ogni numero naturale n

Per dimostrare $P(n)$ con il principio di induzione matematica, dobbiamo:

1. Controllare che $P(1)$ sia vera (primo passo dell'induzione)
2. Supporre che $P(n)$ sia vera (ipotesi di induzione) e verificare che è vera anche $P(n+1)$

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$!

Esempio:

Vogliamo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale la proposizione $P(n)$

$$P(n) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

Non possiamo verificare se $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$ sostituendo tutti i numeri naturali!

OPERAZIONI SUI LIMITI

LIMITI DI FUNZIONI ELEMENTARI

Il calcolo di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ è una funzione continua in x_0 poiché basta sostituire il valore di x_0 nell'espressione di $f(x)$.

Funzioni potenza $y=x^n$

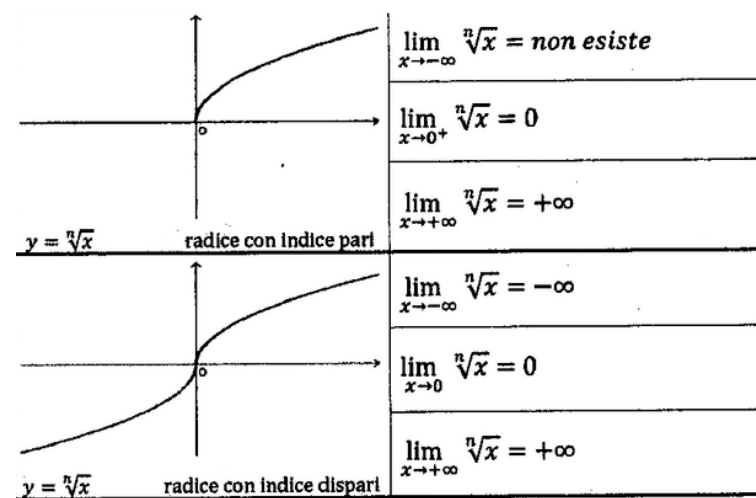
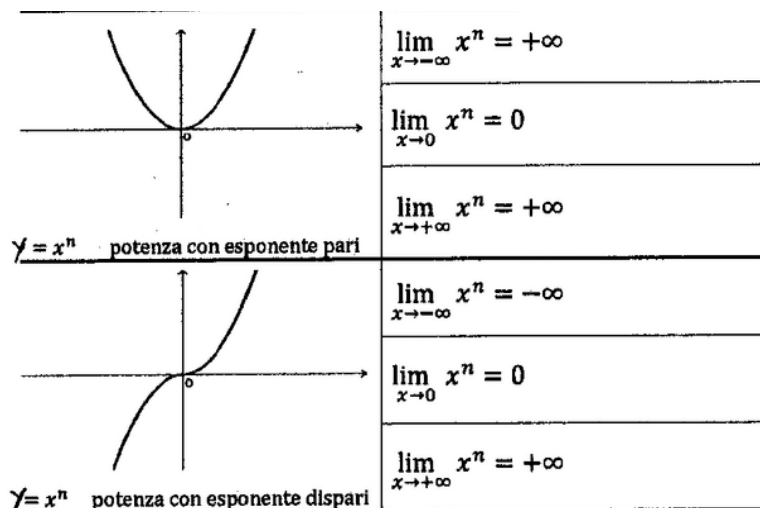
se n è pari: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$

se n è dispari: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

Funzioni radice $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$)

se n è pari: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

se n è dispari: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$



Funzioni esponenziali $y=a^x$

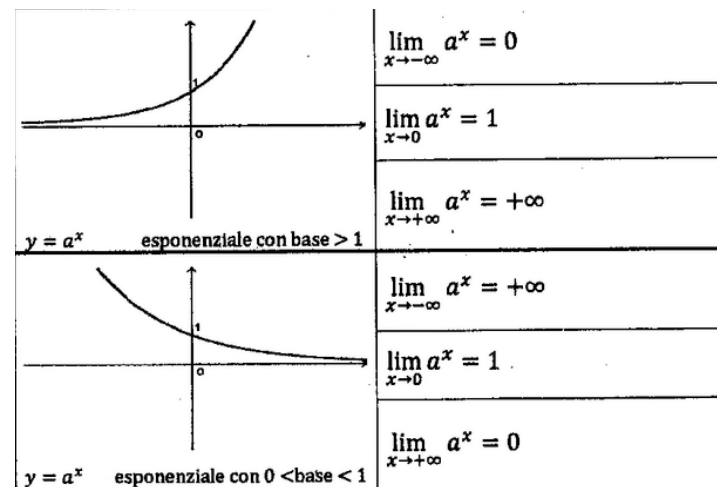
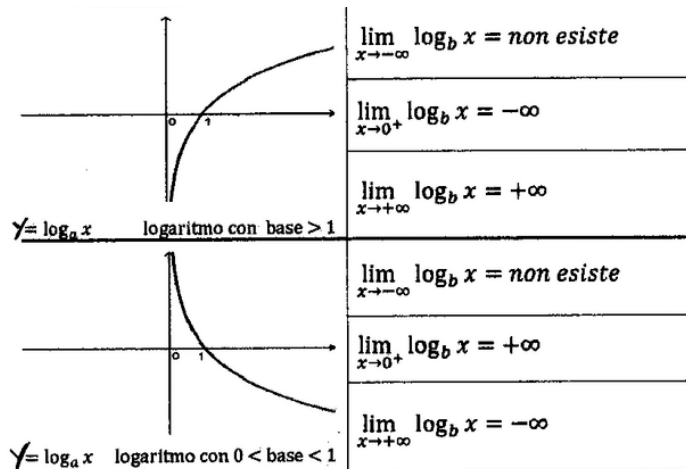
se $a>1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

se $0<a<1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Funzioni logaritmiche $y=\log_a x$

se $a>1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

se $0<a<1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$



LIMITE DELLA SOMMA

Le funzioni hanno limite finito

In generale, è vero che il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei loro limiti, quando questi esistono e sono finiti.

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, dove $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l + m$.

In particolare, questo teorema dice che, per ogni x_0 tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$.

Questo significa che **la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua**.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Cosa accade quando una delle due funzioni ha il limite infinito? Vediamo i vari casi possibili con questa tabella.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim f(x) + g(x)$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

LIMITE DEL PRODOTTO



PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE CON LIMITE INFINITO

Consideriamo le funzioni $f(x)=3x-1$ e $g(x)=4 \cdot f(x)=4 \cdot (3x-1)$.

Osserviamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x-1) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \{4 \cdot (3x-1)\} = 20 = 4 \cdot 5.$$

Abbiamo cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{4 \cdot f(x)\} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Si può, infatti, dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Sia k un numero reale e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{k \cdot f(x)\} = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot l.$$

LE FUNZIONI HANNO LIMITE FINITO

Consideriamo le funzioni $f(x)=3x, g(x)=x+1$ e

$$h(x)=f(x) \cdot g(x)=3x(x+1) \rightarrow h(x)=3x^2+3x.$$

Calcoliamo i limiti delle tre funzioni per x che tende a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2+3x) = 6 = 3 \cdot 2.$$

Notiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) \cdot g(x)\} = \{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)\} \cdot \{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\}.$$

In generale, infatti, vale il seguente teorema.

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \cdot m.$$

Dal teorema del limite del prodotto si ricava quello del limite della **potenza di una funzione**.

TEOREMA

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = l^n, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

LE FUNZIONI NON HANNO ENTRAMBE LIMITE FINITO

Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, per il limite del prodotto si possono presentare diversi casi che riassumiamo nella tabella, osservando che anche quando si usano i simboli $+\infty$ e $-\infty$ vale ancora la regola dei segni.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim [f(x) \cdot g(x)]$
$l > 0$	$\begin{matrix} < +\infty \\ < -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$
$l < 0$	$\begin{matrix} < +\infty \\ < -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$